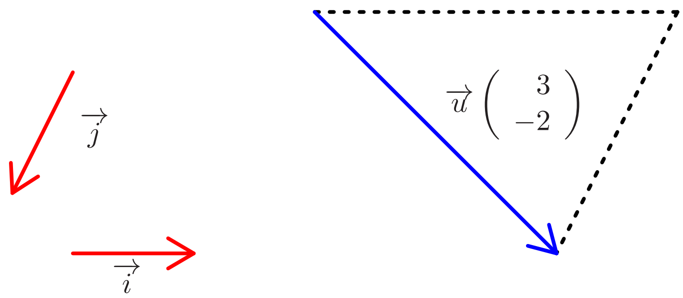
III. Géométrie du plan

1 Repérage dans le plan

1.1 Repérage cartésien

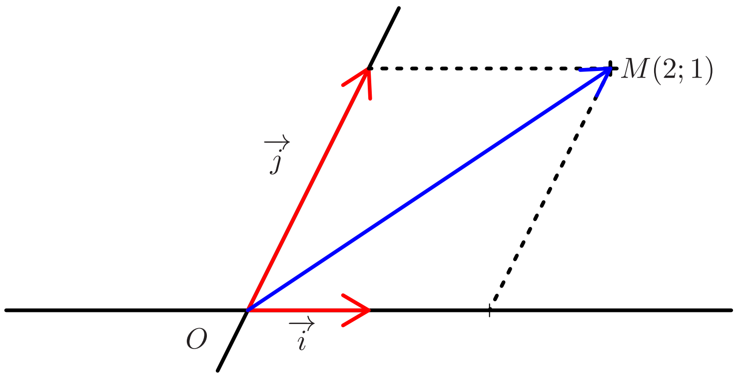
Définition 1. *On appelle* **base** *du plan un couple* $(\vec{i}, \vec{j})$ *avec* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sous la forme* $\vec{u} = \lambda \vec{i} + \mu \vec{j}$ *avec* λ *et* μ *des nombres réels. Les nombres* λ *et* μ *sont appelés* **coordonnées** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, le nombre* λ *est appelé* **abscisse** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$ *et le nombre* μ *est appelé* **ordonnée** *du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*. On note* $\vec{u}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.



Remarque 1. *Dans la base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on a* $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1. *Le plan étant muni d'une base* $(\vec{i}, \vec{j})$*, on considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Montrer que* $(\vec{u}, \vec{v})$ *est une base du plan et déterminer les coordonnées des vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *dans cette base.*

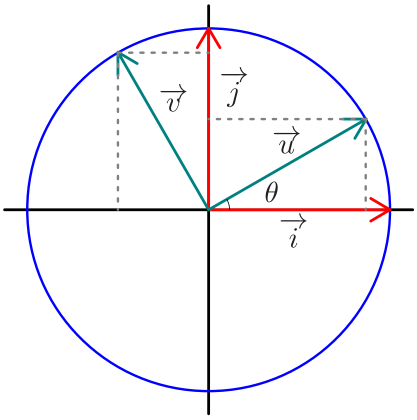
Définition 2. *On appelle* **repère cartésien** *du plan un triplet* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, avec* O *un point du plan et* $(\vec{i}, \vec{j})$ *une base du plan. Le point* O *est appelé* **origine** *du repère, la droite* $(O, \vec{i})$ *est appelée* **axe des abscisses** *et la droite* $(O, \vec{j})$ *est appelée* **axe des ordonnées***. Si les vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *sont orthogonaux, le repère est dit* **orthogonal** *si de plus ils sont de même norme alors le repère est dit* **orthonormal***. Tout point* M *du plan est repéré de manière unique par deux nombres* x *et* y *tels que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$*. Les nombres* x *et* y *sont appelés* **coordonnées** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, le nombre* x *est appelé* **abscisse** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *et le nombre* y *est appelé* **ordonnée** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*. On note* $M(x; y)$.

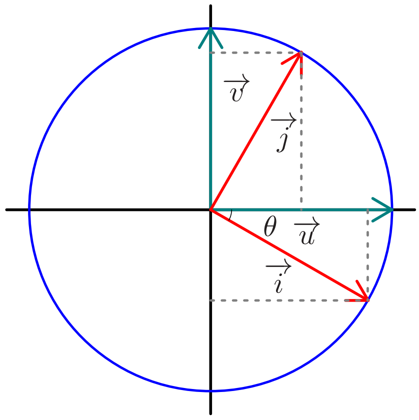


Exercice 2. *Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ainsi que deux points $O'(1;2)$ et $M(x;y)$. Montrer que $(O', \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan et déterminer les coordonnées du point M dans ce repère en fonction de x et y.*

Propriété 1. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère la base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v})$ obtenue par rotation d'angle θ des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. On a :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{u} & = & \cos\theta & \vec{i} & + & \sin\theta & \vec{j} \\ \vec{v} & = & -\sin\theta & \vec{i} & + & \cos\theta & \vec{j} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \vec{i} & = & \cos\theta & \vec{u} & - & \sin\theta & \vec{v} \\ \vec{j} & = & \sin\theta & \vec{u} & + & \cos\theta & \vec{v} \end{array}\right.$$





Démonstration. Exigible. □

Exercice 3. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ obtenus respectivement par rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ainsi que deux points $O'(1;2)$ et $M(x;y)$. Montrer que $(O', \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan et déterminer les coordonnées du point M dans ce repère en fonction de x et y.*

Propriété 2. *Dans le plan muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$, l'image d'un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ par une rotation d'angle θ est le vecteur $r_\theta(\vec{w})\begin{pmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}$.*

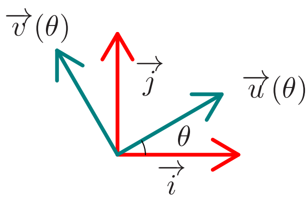
Démonstration. Exigible - On se place dans le plan complexe et on remarque que $z_{r_\theta(\vec{w})} = e^{i\theta} z_{\vec{w}}$. □

Exercice 4. *Dans le plan muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer l'image de ce vecteur par une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$.*

1.2 Repérage polaire

Définition 3. *Le plan étant muni d'une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$, on définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la* **base polaire** *$\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$ par :*

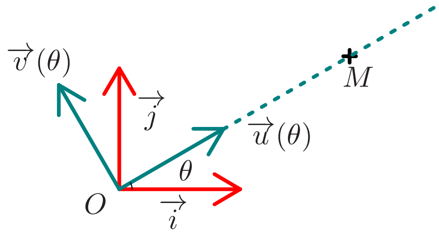
$$\boxed{\begin{array}{rcccrcrcr} \vec{u}(\theta) & = & r_\theta(\vec{i}) & = & \cos\theta & \vec{i} & + & \sin\theta & \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) & = & r_\theta(\vec{j}) & = & -\sin\theta & \vec{i} & + & \cos\theta & \vec{j} \end{array}}$$



Remarque 2. *Dans le plan complexe, les affixes des vecteurs $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ sont respectivement $e^{i\theta}$ et $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} = ie^{i\theta}$.*

Propriété 3. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *on considère un point* $M(x; y)$*, alors il existe deux réels* ρ *et* θ *tels que* $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}(\theta)$*. Les nombres* ρ *et* θ *sont appelés* **coordonnées polaires** *du point* M *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, on a :*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \\ \rho & = & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}}$$



Démonstration. Exigible. □

Remarque 3. *Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires.*

Remarque 4. *La base polaire* $\left(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\right)$ *est une base mobile car elle dépend du point* M *considéré.*

Exercice 5. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \vec{i}, \vec{j})$*, déterminer les coordonnées polaires du point* $M(-1; 1)$*.*

2 Produit scalaire et déterminant dans le plan

2.1 Produit scalaire

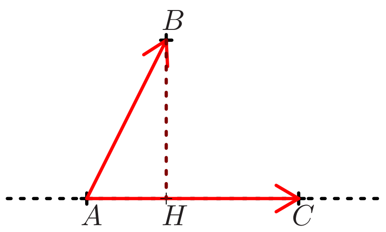
Définition 4. *On appelle* **produit scalaire** *de deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *du plan :*

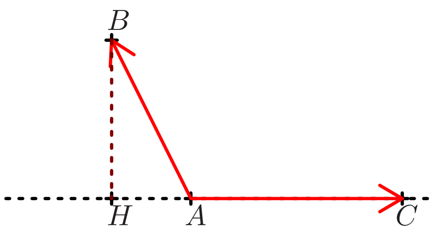
$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \left\{ \begin{array}{cl} ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) & si\ \vec{u} \neq \vec{0}\ et\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & si\ \vec{u} = \vec{0}\ ou\ \vec{v} = \vec{0} \end{array} \right.}$$

Remarque 5. *Le produit scalaire est symétrique car* $\boxed{\vec{v}.\vec{u} = \vec{u}\vec{v}}$.

Remarque 6. *Le produit scalaire est nul si et seulement si les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux.*

Propriété 4. *On considère trois points* A*,* B *et* C *non alignés du plan et on note* H *le projeté orthogonal du point* B *sur la droite* (AC)*, alors* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC} = \pm AH \times AC$*.*





Démonstration. Exigible. □

Propriété 5. *On considère deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *du plan complexe, alors :*

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \mathcal{R}e(\overline{z_{\vec{u}}}z_{\vec{v}}) = xx' + yy'}$$

Démonstration. Exigible - On note $z_{\vec{u}} = ||\vec{u}||e^{i\alpha}$ et $z_{\vec{v}} = ||\vec{v}||e^{i\beta}$. □

Remarque 7. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Exercice 6. *Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, $2+i$ et $3i-1$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.*

Propriété 6. Bilinéarité du produit scalaire

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et deux nombres réels λ et μ, alors :

$$\boxed{(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}=\lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w})+\mu(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 5. □

Propriété 7. Formule d'Al-Kashi

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, alors :

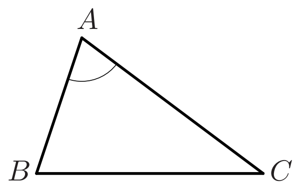
$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right)}$$

Démonstration. Exigible - On remarque que $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$. □

Théorème 1. Théorème d'Al-Kashi *ou* **Loi des cosinus**

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$\boxed{BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})}$$



Démonstration. Exigible - On utilise le produit scalaire. □

Remarque 8. *Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore.*

Exercice 7. *Déterminer les mesures des angles d'un triangle dont les longueurs des côtés sont égales à* 2, 3 *et* 4.

2.2 Déterminant

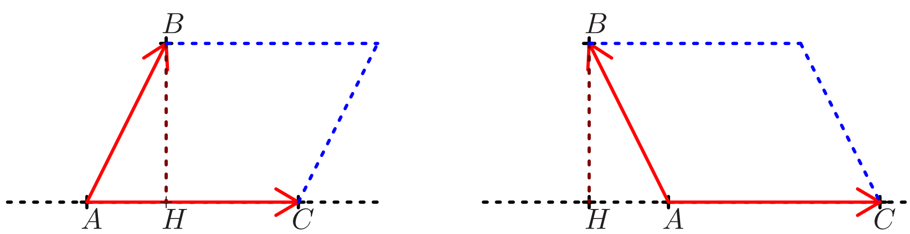
Définition 5. *On appelle* **déterminant** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan :*

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{cases}||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & si\ \overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}\ et\ \overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{0}\\ 0 & si\ \overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\ ou\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\end{cases}}$$

Remarque 9. *Le déterminant est antisymétrique car* $\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})=-\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$.

Remarque 10. *Le déterminant est nul si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Propriété 8. *On considère trois points A, B et C non alignés du plan et on note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC), alors* $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\mathrm{Det}(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{AC})=\pm HB\times AC$.



Démonstration. Exigible. □

Propriété 9. *On considère deux vecteurs* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *du plan complexe, alors :*

$$\boxed{\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \mathcal{I}m(\overline{z_{\overrightarrow{u}}}z_{\overrightarrow{v}}) = xy' - yx'}$$

Démonstration. Exigible - On note $z_{\overrightarrow{u}} = ||\overrightarrow{u}||e^{i\alpha}$ et $z_{\overrightarrow{v}} = ||\overrightarrow{v}||e^{i\beta}$. □

Remarque 11. *Cette propriété n'est valide que si le plan est muni d'une base orthonormale.*

Remarque 12. *On peut noter* $xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Exercice 8. *Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, $2+i$ et $3i-1$. Déterminer l'aire du triangle ABC.*

Exercice 9. *Dans le plan complexe, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectives $1+2i$ et $i-3$. Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.*

Propriété 10. Bilinéarité du déterminant

On considère trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et deux nombres réels λ et μ, alors :

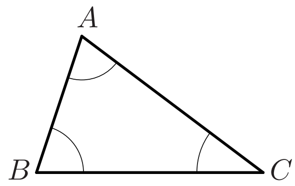
$$\boxed{\text{Det}(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \lambda\ \text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) + \mu\ \text{Det}(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$$

Démonstration. Exigible - On utilise la propriété 9. □

Théorème 2. Loi des sinus

On considère un triangle ABC du plan, alors :

$$\boxed{\frac{\sin\widehat{BAC}}{BC} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{AC} = \frac{\sin\widehat{ACB}}{AB}}$$



Démonstration. Exigible - On utilise le déterminant. □

3 Droites et cercles du plan

3.1 Droites

Propriété 11. Équation cartésienne d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y)$ des points d'une droite $\mathcal{D}$ vérifient une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ vérifiant une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$ est une droite.

Démonstration. Exigible - On utilise le déterminant. □

Exercice 10. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$.*

Propriété 12. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$. Alors le vecteur* $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *est un* **vecteur directeur** *de la droite $\mathcal{D}$ et le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *est un* **vecteur normal** *à la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible. □

Remarque 13. *Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normé ($a^2+b^2=1$), l'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est appelée* **équation normale** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Exercice 11. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(5;-2)$ et parallèle à la droite d'équation $3x-2y+5=0$.*

Propriété 13. Paramétrage d'une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère une droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(x_A;y_A)$ et admettant $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x_{\overrightarrow{u}} \\ y_{\overrightarrow{u}} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Alors le point $M(x;y)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_A & + & t\ x_{\overrightarrow{u}} \\ y & = & y_A & + & t\ y_{\overrightarrow{u}} \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 12. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage de la droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(-3;5)$.*

Propriété 14. Intersection de deux droites

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$ ainsi qu'une droite $\mathcal{D}'$ d'équation cartésienne $a'x+b'y+c'=0$ avec a', b' et c' des nombres réels et $(a';b')\neq(0;0)$. Alors :

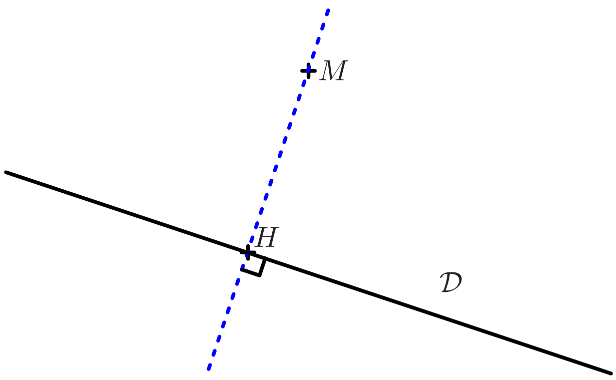
- *Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues.*
- *Si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent un unique point d'intersection.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 15. Distance d'un point à une droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec a, b et c des nombres réels et $(a;b)\neq(0;0)$. Alors la distance d'un point $M(x_M;y_M)$ à la droite $\mathcal{D}$ est :

$$\boxed{\mathrm{d}(M,\mathcal{D})=\frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



Démonstration. Exigible - On calcule $|\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{n}|$. □

Exercice 13. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer la distance du point $M(5;-2)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x-2y+5=0$ ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal H du point M sur la droite $\mathcal{D}$.*

Propriété 16. Équation polaire d'une droite ne passant pas par l'origine

Dans le plan complexe, on considère une droite $\mathcal{D}$ ne passant pas par l'origine. Alors il existe deux réels ρ_0 et θ_0 avec $\rho_0 > 0$ tels que le point de coordonnées polaires $(\rho;\theta)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\rho = \dfrac{\rho_0}{\cos(\theta-\theta_0)}$, cette écriture est appelée **équation polaire** *de la droite $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Exigible - On appelle $(\rho_0;\theta_0)$ les coordonnées polaires du projeté orthogonal H du point O sur la droite $\mathcal{D}$ et on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{HM}$ en complexes. □

Remarque 14. *Une équation polaire d'une droite passant par O est de la forme $\theta = \theta_0\ [\pi]$.*

Exercice 14. *Montrer que l'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{2\cos\theta + 3\sin\theta}$ est l'équation d'une droite dont on déterminera une équation cartésienne.*

Propriété 17. Lignes de niveau

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère un point A ainsi qu'un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

- *L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} = Cte$ est une droite perpendiculaire à la droite $(A, \overrightarrow{u})$.*
- *L'ensemble des points M tels que $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = Cte$ est une droite parallèle à la droite $(A, \overrightarrow{u})$.*

Démonstration. Exigible - On considère le point H projeté orthogonal du point M sur la droite $(A, \overrightarrow{u})$. □

3.2 Cercles

Propriété 18. Équation cartésienne d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, les coordonnées $(x;y)$ des points d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon R vérifient une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$, cette équation est appelée une **équation cartésienne** *du cercle $\mathcal{C}$.*

Réciproquement, l'ensemble des points de coordonnées $(x;y)$ vérifiant une équation de la forme $(x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = R^2$ avec x_ω, y_ω et R des nombres réels et $R \geqslant 0$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon R.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 15. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, montrer que l'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

Propriété 19. Paramétrage d'un cercle

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(x_\Omega;y_\Omega)$ et de rayon R. Alors le point $M(x;y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x & = & x_\Omega & + & R\cos t \\ y & = & y_\Omega & + & R\sin t \end{array}\right.$$

Cette écriture est appelée un **paramétrage** *du cercle $\mathcal{C}$.*

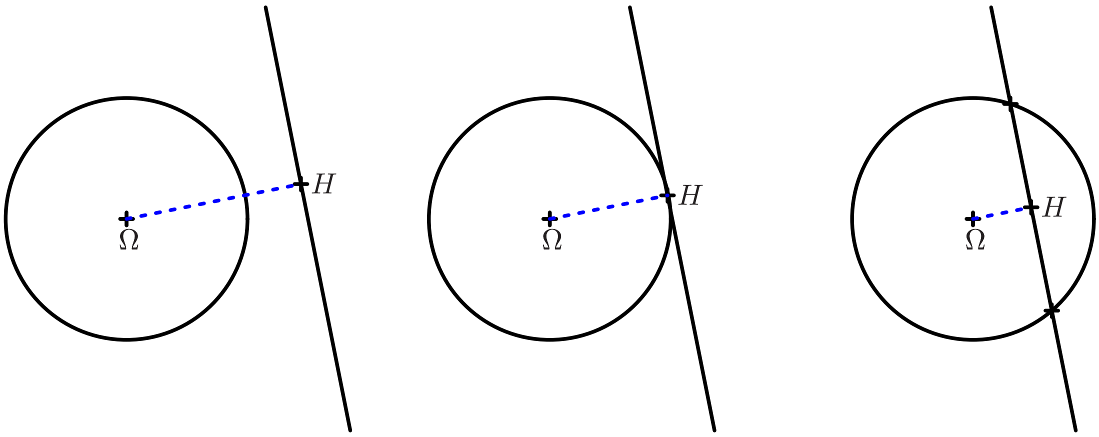
Démonstration. Exigible. □

Exercice 16. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer un paramétrage du cercle de centre $\Omega(-1;3)$ et de rayon 2.*

Propriété 20. **Intersection d'une droite et d'un cercle**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère une droite $\mathcal{D}$ ainsi qu'un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon $R > 0$. Alors :

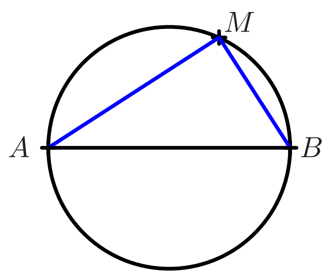
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) > R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ n'ont aucun point d'intersection.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) = R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont un unique point d'intersection et la droite $\mathcal{D}$ est dite tangente en ce point au cercle $\mathcal{C}$.*
- *Si $\mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D}) < R$, la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ ont deux points distincts d'intersection.*



Démonstration. Exigible - On montre que $HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \mathcal{D})^2$ avec M un point de $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ et H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$. □

Exercice 17. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, déterminer l'intersection de la droite et du cercle d'équations cartésiennes respectives $x - y + 4 = 0$ et $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.*

Propriété 21. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère deux points distincts A et B. Alors le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.*



Démonstration. Exigible - On montre que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$ avec I milieu de $[AB]$. □

Propriété 22. **Équation polaire d'un cercle passant par l'origine**

Dans le plan complexe, on considère un cercle $\mathcal{C}$ passant pas par l'origine. Alors il existe deux réels ρ_0 et θ_0 avec $\rho_0 > 0$ tels que le point de coordonnées polaires $(\rho; \theta)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $\rho = \rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$, cette écriture est appelée **équation polaire** *du cercle $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Exigible - On appelle $(\rho_0; \theta_0)$ les coordonnées polaires du point O' du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé au point O et on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MO'}$ en complexes. □

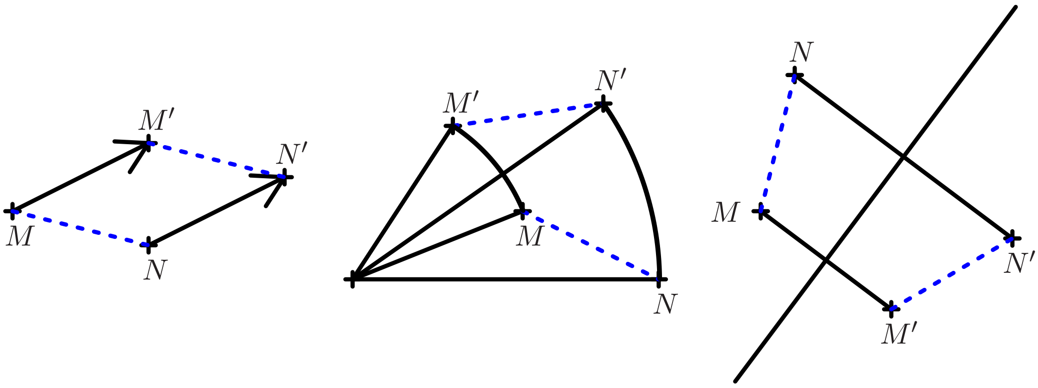
Exercice 18. *Montrer que l'équation polaire $\rho = 2\cos\theta - 4\sin\theta$ est l'équation d'un cercle dont on déterminera le centre ainsi que le rayon.*

4 Transformations du plan

4.1 Isométries

Définition 6. *On appelle* **isométrie** *du plan, une transformation du plan qui conserve les distances.*

Remarque 15. *Les translations, rotations et réflexions du plan sont des isométries.*



Propriété 23. *La composée de deux isométries du plan est une isométrie.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 24. *Une isométrie du plan conserve les angles géométriques d'où l'alignement, l'orthogonalité et le parallélisme.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème d'Al-Kashi. □

Définition 7. *Une isométrie qui conserve les angles orientés est appelée une* **isométrie directe** *ou un* **déplacement***, une isométrie qui transforme un angle orienté en son opposé est appelée une* **isométrie indirecte** *ou un* **antidéplacement***.*

Remarque 16. *Les translations et rotations du plan dont des déplacements, les réflexions du plan sont des antidéplacements.*

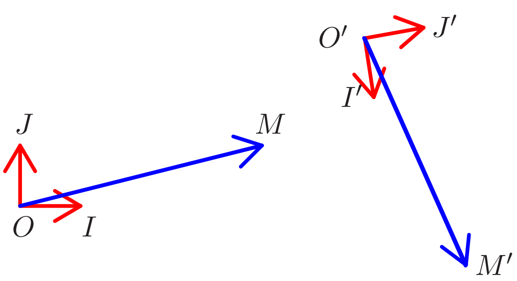
Propriété 25. *Une isométrie du plan conserve le barycentre.*

Démonstration. Exigible - On prouve la propriété pour le barycentre de deux points puis on utilise l'associativité. □

Propriété 26. **Écriture complexe d'un déplacement du plan**

L'écriture complexe d'un déplacement du plan est de la forme $z' = az + b$ avec a et b deux nombres complexes et $|a| = 1$.

Démonstration. Exigible - On note $z_{\overrightarrow{O'I'}} = a$ et $z_{O'} = b$ et on remarque que l'affixe du point M' dans le repère (O', I', J') est égale à l'affixe du point M dans le repère (O, I, J) d'où $z_{\overrightarrow{O'M'}} = z \times z_{\overrightarrow{O'I'}}$.



□

Théorème 3. **Classification des isométries directes du plan**

Un déplacement du plan est soit une translation soit une rotation.

Démonstration. Exigible - On recherche les points fixes éventuels d'un déplacement à partir de son écriture complexe. □

Exercice 19. *Dans le plan complexe, déterminer la nature de la transformation associée à l'écriture complexe* $z' = -iz + 3i + 1$.

4.2 Similitudes directes

Définition 8. *On appelle* **homothétie** *de* **centre** Ω *et de* **rapport** $k \in \mathbb{R}^*$ *la transformation qui à tout point* M *du plan associe le point* M' *défini par* $\overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}$.

Remarque 17. *Une homothétie de rapport* 1 *est l'identité, une homothétie de centre* Ω *et de rapport* -1 *est une symétrie centrale de centre* Ω *ou rotation de centre* Ω *et d'angle* π.

Exercice 20. *Construire l'image d'un triangle* ABC *quelconque de centre de gravité* G *par l'homothétie de centre* G *et de rapport* $\dfrac{1}{2}$ *puis par l'homothétie de centre* G *et de rapport* -2.

Propriété 27. *Une homothétie de rapport* k *multiplie les longueurs par* $|k|$.

Démonstration. Exigible - On montre que $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$. □

Propriété 28. *Dans le plan complexe, le point* M' *d'affixe* z' *est l'image du point* M *d'affixe* z *par l'homothétie de centre* Ω *d'affixe* z_Ω *et de rapport* $k \in \mathbb{R}^*$ *si et seulement si* $z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 9. *On appelle* **similitude** *du plan de* **rapport** $k \in \mathbb{R}_+^*$*, une transformation du plan qui multiplie les distances par* k.

Remarque 18. *Les isométries sont des similitudes de rapport* 1*, une homothétie de rapport* k *est une similitude de rapport* $|k|$.

Propriété 29. *La composée de deux similitudes de rapports* k_1 *et* k_2 *est une similitude de rapport* $k_1 \times k_2$.

Démonstration. Exigible. □

Propriété 30. *Une similitude du plan conserve les angles géométriques d'où l'alignement, l'orthogonalité et le parallélisme.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème d'Al-Kashi. □

Définition 10. *Une similitude qui conserve les angles orientés est appelée une* **similitude directe***, une similitude qui transforme un angle orienté en son opposé est appelée une* **similitude indirecte**.

Remarque 19. *Les homothéties sont des similitudes directes, la composée d'une homothétie et d'un déplacement est une similitude directe et d'une homothétie et d'un antidéplacement une similitude indirecte.*

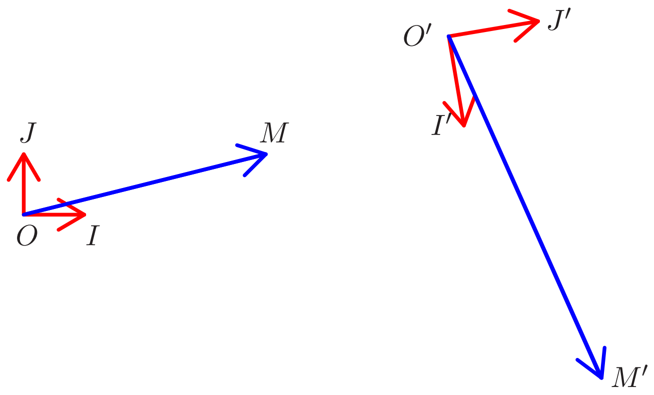
Propriété 31. *Une similitude du plan conserve le barycentre.*

Démonstration. Exigible - On prouve la propriété pour le barycentre de deux points puis on utilise l'associativité. □

Propriété 32. Écriture complexe d'une similitude directe du plan

L'écriture complexe d'une similitude directe du plan de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ est de la forme $z' = az + b$ avec a et b deux nombres complexes et $|a| = k$.

Démonstration. Exigible - On note $z_{\overrightarrow{O'I'}} = a$ et $z_{O'} = b$ et on remarque que l'affixe du point M' dans le repère (O', I', J') est égale à l'affixe du point M dans le repère (O, I, J) d'où $z_{\overrightarrow{O'M'}} = z \times z_{\overrightarrow{O'I'}}$.



□

Théorème 4. Classification des similitudes directes du plan

Une similitude directe du plan est soit une translation soit la composée commutative d'une homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}_+^*$ et d'une rotation d'angle α de mêmes centres Ω, dans ce cas Ω et α sont respectivement appelés **centre** *et* **angle** *de la similitude.*

Démonstration. Exigible - On recherche les points fixes éventuels d'une similitude directe à partir de son écriture complexe. □

Exercice 21. *Dans le plan complexe, déterminer la nature de la transformation associée à l'écriture complexe $z' = -2iz + 3i - 1$.*

Exercice 22. *Construire l'image d'un triangle ABC quelconque de centre de gravité G par la similitude directe de centre G, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport 2.*